

Die beschleunigte RITZ-Iteration für Polynome und Polynommatrizen

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 63, 2010, S.9-27



J. Cramer Verlag, Braunschweig

Die beschleunigte RITZ-Iteration für Polynome und Polynommatrizen

SIGURD FALK

Echternstraße 46, D-38100 Braunschweig

1. Einleitung

Polynome der Art

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_p\lambda^p \quad (1.1)$$

sind die einfachsten Funktionen der Mathematik, sie spielen daher in Technik und Naturwissenschaften eine wichtige Rolle, siehe dazu die Monographie [1] von L. Collatz (1910–1990) sowie die Zusammenfassung [2].

Die Abb. 1 zeigt einen Schwinger mit Federzahl c , Dämpfungsziffer d und Masse m . Das sogenannte charakteristische Polynom

$$f(\lambda) = c + d\lambda + m\lambda^2 \quad (1.2)$$

(wo also $a_0 = c$, $a_1 = d$ und $a_2 = m$ ist) besitzt die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2m} \left[d + i \cdot \sqrt{4cm - d^2} \right]; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2m} \left[d - i \cdot \sqrt{4cm - d^2} \right], \quad (1.3)$$

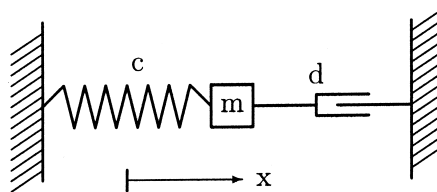


Abbildung 1: Schwinger mit einem Freiheitsgrad.

Eingegangen 02.05.2008. Vorgelegt von Thomas Hartmann und Heiko Harborth.

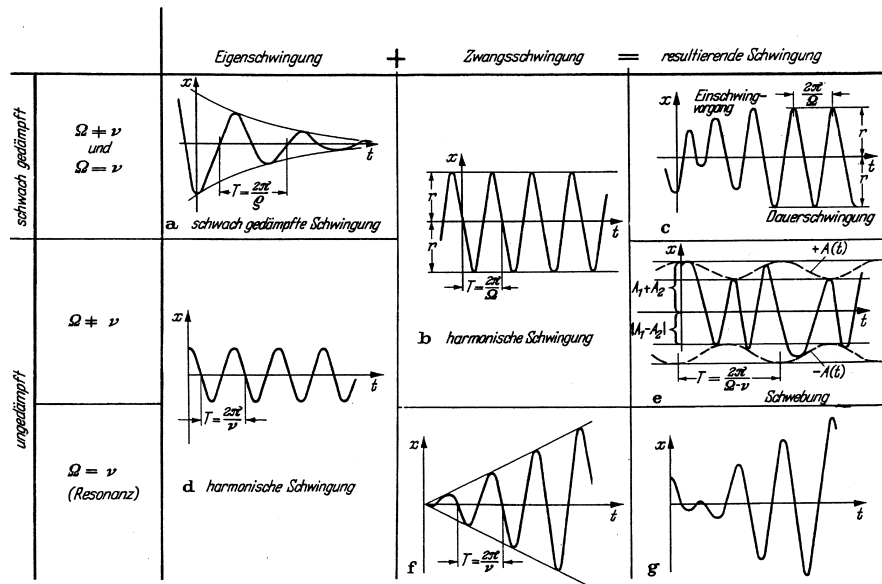


Abbildung 2: Freie und erzwungene Schwingungen mit einem Freiheitsgrad.

die als **Eigenwerte** bezeichnet werden, und allein von diesen hängt das Schwingungsverhalten, insbesondere die Schwingungsdauer T ab, wie in Abb. 2 umfassend dargestellt.

Betrachten wir als nächstes das Schwingungssystem der Abb. 3. Hier gibt es $n = 3 \cdot 2 = 6$ Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms; doch sind die Koeffizienten a_0 bis a_6 in recht komplizierter Weise von den Federzahlen, Dämpferziffern und Massen des Schwingers abhängig. Diese Abhängigkeit wird zweckmäßig beschrieben durch Matrizen, das sind quadratische Schemata der Art

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

und mit diesen lassen sich die Gleichungen (1.2) und (1.1) formulieren als

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{C} + \mathbf{D}\lambda + \mathbf{M}\lambda^2 \quad (1.5)$$

beziehungsweise

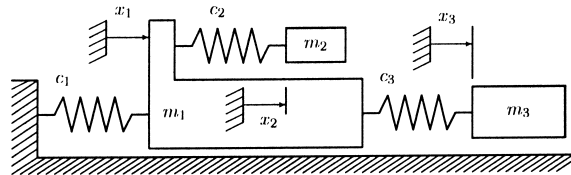


Abbildung 3: Linearer Schwinger mit drei Freiheitsgraden.

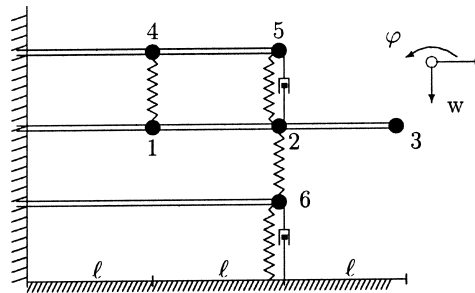


Abbildung 4: Schwingungssystem bestehend aus masselosen Balken und Einzel(drehmassen).

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \mathbf{A}_2\lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_p\lambda^p, \quad (1.6)$$

und diese Matrix wird als **Polynommatrix** bezeichnet. Matrizen der Ordnung $n \geq 100\,000$ sind durchaus nicht ungewöhnlich infolge einer sogenannten **Finitisierung** eines schwingungsfähigen elastischen Gebildes, etwa einer Stahlbetonbrücke oder eines Lastkraftwagens, und die Aufgabe des Numerikers besteht darin, Rechenabläufe (Algorithmen) zu ersinnen, die es ermöglichen, einige oder alle Eigenwerte der Polynommatrix (1.6) mit einer vorgegebenen Genauigkeit von 16 (bei gehobenen Ansprüchen wie etwa in der Raumfahrt auch 32) Dezimalstellen zu berechnen.

Ein solcher Algorithmus, der sich von den zur Zeit auf dem Softwaremarkt angebotenen Algorithmen LR, QR, QZ und anderen wesentlich unterscheidet, wird auf den folgenden Seiten beschrieben.

Um die dem Verfahren zugrundeliegende Numerik verständlich zu machen, ist es erforderlich, den Sonderfall der ungedämpften Schwingung zu diskutieren. Zuzufolge $d = 0$ geht die Gleichung (1.2) über in

$$f(\lambda) = c + m\lambda^2 = 0 \quad (1.7)$$

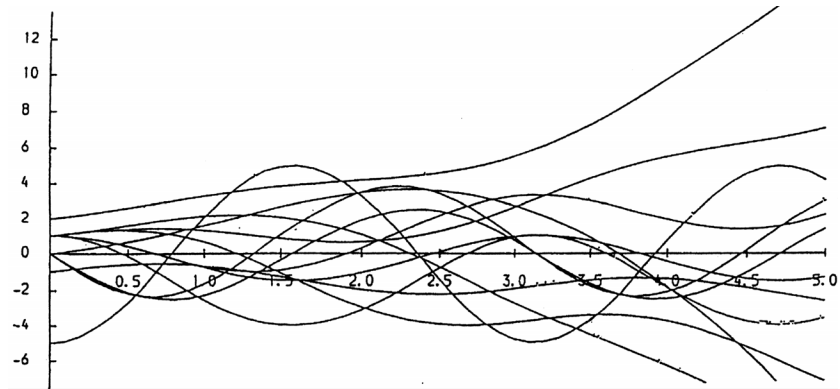


Abbildung 5: Computerausdruck eines teils gedämpften, teils angefachten Schwingungssystems mit $n=12$ Freiheitsgraden.

mit der Lösung

$$\lambda^2 = -\frac{c}{m}. \quad (1.8)$$

Die beiden Eigenwerte sind somit

$$\lambda_1 = -i \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad \lambda_2 = +i \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (1.9)$$

und dies folgt auch aus (1.3), wenn dort $d = 0$ gesetzt wird.

Für mehrere Freiheitsgrade gilt nach (1.5)

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{C} + \mathbf{M}\lambda^2, \quad (1.10)$$

und es entsteht die Frage, wie der Quotient (1.8) zu ersetzen ist. Die Antwort gibt J.W. Rayleigh (1842–1919) durch den nach ihm benannten Quotienten

$$R = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}, \quad (1.11)$$

wo \mathbf{y}^T und \mathbf{x} zwei geeignet zu wählende Näherungsvektoren sind. Demzufolge liefert der Rayleigh-Quotient auch nur eine Näherung für den gesuchten Wert λ^2 , und die Idee von W. Ritz (1878–1909) besteht darin, diese Näherung schrittweise (iterativ) solange zu verbessern, bis eine geforderte Genauigkeit erreicht wurde. Nochmals: das Verfahren von Rayleigh-Ritz ist nur anwendbar für

ungedämpfte Systeme, und erst durch einen Kunstgriff von S. Günther (1848–1923) gelingt es, den Algorithmus auf die Matrix (1.5), allgemeiner auf die Matrix (1.6) zu übertragen. Über den hier kurz umrissenen Fragenkreis existiert eine umfangreiche Literatur, siehe dazu die Arbeiten [4], [6], [14], [22], [26], [28].

2. Der Rayleigh-Quotient

Vorgelegt ist die Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{y}^T \mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{o}^T; \quad \mathbf{F}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (2.1)$$

mit der in λ linearen Matrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Der nach Rayleigh benannte Quotient

$$R = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{z}}{\mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{z}}, \quad (2.3)$$

läßt sich nach der Wahl eines Schiftpunktes Λ auch formulieren als

$$R(\Lambda) = \Lambda + \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z}}{\mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{z}}, \quad (2.4)$$

wo die Vektoren \mathbf{w} und \mathbf{z} geeignet zu wählen sind. Insbesondere seien sie abhängig von Λ , dann wird

$$R(\Lambda) = \Lambda + \frac{\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda)}{\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathbf{B} \mathbf{z}(\Lambda)}, \quad (2.5)$$

und damit entsteht die Iterationsvorschrift

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{\mathbf{w}^T(\Lambda_j) \mathbf{F}(\Lambda_j) \mathbf{z}(\Lambda_j)}{\mathbf{w}^T(\Lambda_j) \mathbf{B} \mathbf{z}(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Falls Konvergenz eintritt, wird für einen gewissen Index $j = \nu$

$$\Lambda_{\nu+1} = \Lambda_\nu = \lambda_\mu, \quad (2.7)$$

wo λ_μ der dem Startschift Λ_1 nächstgelegene Eigenwert ist, und das zugehörige Eigenvektorpaar ist

$$\mathbf{y}_\mu^T = \mathbf{w}^T(\Lambda_\nu); \quad \mathbf{x}_\mu = \mathbf{z}(\Lambda_\nu). \quad (2.8)$$

3. Nullstellen von Polynomen

vorgelegt ist das Polynom

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_\rho\lambda^\rho; \quad a_\rho \neq 0 \quad (3.1)$$

mit im allgemeinen komplexwertigen Koeffizienten a_0 bis a_ρ und gesucht sind einige oder alle Nullstellen λ_1 bis λ_ρ .

Es stehen drei Algorithmen zur Verfügung. Allen ist gemeinsam, dass geeignete Startwerte bekannt sein müssen, damit Konvergenz eintritt.

3A. Das Tangentenverfahren von Newton mit der Iterationsvorschrift

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j - \frac{f(\Lambda_j)}{f'(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

3B. Expansion

Mit dem sogenannten **Begleitpolynom**

$$g_1(\lambda) = a_0 - 1 \cdot a_2\lambda^2 - 2 \cdot a_3\lambda^3 - \dots - (\rho - 1)a_\rho\lambda^\rho \quad (3.3)$$

lautet die Iterationsvorschrift

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{f(\Lambda_j) \cdot \Lambda_j}{g_1(\Lambda_j)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Beweisskizze.

Dem Polynom (3.1) ist das von Günther [13] kreierte Begleitpaar

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{\rho-2} & -a_{\rho-1} \end{bmatrix}; \quad \overset{\circ}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_\rho \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

und damit die Matrix

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}}(\lambda) = \overset{\circ}{\mathbf{A}} - \lambda \overset{\circ}{\mathbf{B}} \quad (3.6)$$

zugeordnet.

Die Optimalvektoren sind hier

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) = [a_0 \quad w_1(\Lambda) w_2(\Lambda) \quad \dots \quad w_{\rho-1}(\Lambda) \quad -\Lambda]; \quad \mathbf{z}(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ \Lambda \\ \Lambda \\ \dots \\ \Lambda^{\rho-2} \\ \Lambda^{\rho-1} \end{bmatrix}; \quad (3.7)$$

mit ihren Bildern (Defekten)

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathring{\mathbf{F}}(\Lambda) = [0 \quad f(\Lambda) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]; \quad \mathring{\mathbf{F}}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -f(\Lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Damit wird, wie leicht nachzurechnen

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathring{\mathbf{F}}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda) = f(\Lambda) \cdot \Lambda. \quad (3.9)$$

Weniger einfach ist die Bilinearform

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathring{\mathbf{B}} \mathbf{z}(\Lambda) = g_1(\Lambda) \quad (3.10)$$

zu ermitteln. Man erhält nach einer langwierigen, aus Platzgründen unterdrückten Zwischenrechnung das Begleitpolynom (3.3) für $\lambda = \Lambda$.

3C. Der Algorithmus E C P (Expansion des charakteristischen Polynoms), siehe dazu [1], [2], [3], [4], [10] und [30 S. 410 ff].

Dazu das Programm:

1. Wähle ρ disjunkte (paarweise verschiedene) Stützwerte

$$\tilde{\lambda}_1, \quad \tilde{\lambda}_2, \quad \dots, \quad \tilde{\lambda}_\rho. \quad (3.11)$$

2. Berechne die Funktionswerte

$$f(\tilde{\lambda}_1), \quad f(\tilde{\lambda}_2), \quad \dots, f(\tilde{\lambda}_\rho). \quad (3.12)$$

3. Die Produkte

$$P_j = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j}}^{\rho} (\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_\mu); \quad j = 1, 2, \dots, \rho. \quad (3.13)$$

4. Daraus die Defekte

$$d_j = \frac{f(\tilde{\lambda}_j)}{P_j} \cdot \frac{1}{a_\rho}; \quad j = 1, 2, \dots, \rho. \quad (3.14)$$

Damit sind definiert die beiden vom Parameter λ abhängigen Summen

$$S(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{\rho} \frac{d_\mu}{\tilde{\lambda}_\mu \lambda} \quad (3.15)$$

und

$$T(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{\rho} \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda)^2} \quad (3.16)$$

und mit diesen der Rayleigh-Quotient

$$R(\lambda) = \lambda + \frac{S(\lambda)[1 - S(\lambda)]}{T(\lambda)}. \quad (3.17)$$

Der Algorithmus von Ritz lautet damit

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{S(\Lambda_j)(1 - S(\Lambda_j))}{T(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Gestartet wird mit dem sogenannten Hauptwert

$$\Lambda_k = \tilde{\lambda}_k - d_k; \quad k = 1, 2, \dots, \rho. \quad (3.19)$$

4. Die Optimalvektoren und das Endpivot

Die Polynommatrix (1.6), genommen für einen geeignet gewählten Schift (Λ) wird auf die kompakte Form komprimiert

$$\mathbf{F}(\Lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\Lambda) & \dots & f_{1n}(\Lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\Lambda) & \dots & f_{nn}(\Lambda) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

und sodann nach dem Gaußschen Algorithmus auf die obere Dreiecksmatrix

$$\nabla(\Lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{jj}(\Lambda) & \mathbf{f}_{jk}(\Lambda) \\ \mathbf{o}^T & p(\Lambda) \end{bmatrix}; \quad \det \nabla_{jj}(\Lambda) \neq 0 \quad (4.2)$$

transformiert, wo $p(\Lambda)$ als **Endpivot** bezeichnet wird.

Aus dem gestaffelten Gleichungssystem

$$\nabla_{jj}(\Lambda) \mathbf{z}_{jk}(\Lambda) = \mathbf{f}_{jk}(\Lambda) \rightarrow \mathbf{z}_{jk}(\Lambda) \quad (4.3)$$

wird der Rechts-Optimalvektor

$$\mathbf{z}(\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jk}(\Lambda) \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

berechnet. Dessen Bildvektor ist offensichtlich

$$\mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ -p(\Lambda) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Parallel dazu führt die Tranponierte Matrix $\mathbf{F}^T(\Lambda)$ nach der gleichen Vorgehensweise auf das Vektorpaar

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) = [\mathbf{w}_{jk}^T \quad -1] \quad (4.6)$$

und

$$\mathbf{w}_{jk}^T \mathbf{F}(\Lambda) = [\mathbf{o}^T \quad -p(\Lambda)], \quad (4.7)$$

damit gilt

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda) = p(\Lambda). \quad (4.8)$$

5. Eigenwerte und Eigenvektoren einer Polynommatrix

5A. Der Sonderfall $\rho = 1$.

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda; \quad \det \mathbf{A}_1 \neq 0, \quad (5.1)$$

oder mit $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{B}$ auch so geschrieben

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}; \quad \det \mathbf{B} \neq 0. \quad (5.2)$$

Es gilt

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{p(\Lambda_j)}{\mathbf{w}^T(\Lambda_j) \mathbf{B} \mathbf{z}(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Es konvergiert das Endpivot $p(\Lambda)$ gegen Null und damit das Paar $\mathbf{w}(\Lambda); \mathbf{z}(\Lambda)$ gegen das Eigenvektorpaar $\mathbf{y}; \mathbf{x}$.

5B. Die Polynommatrix (5.1), wo der Sonderfall (5.2) auszuschließen ist. Berechne mit den Optimalvektoren \mathbf{w} und \mathbf{z} die ρ Bilinearformen

$$\tilde{a}_\nu = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_\nu \mathbf{z}; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \rho \quad (5.4)$$

und damit das skalare Kondensat

$$\mathbf{w}^T \mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \lambda + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \dots + \tilde{a}_\rho \lambda^\rho = \tilde{f}(\lambda). \quad (5.5)$$

Es gilt

$$\mathbf{w}^T(\Lambda) \mathbf{F}(\Lambda) \mathbf{z}(\Lambda) = \tilde{f}(\Lambda) = p(\Lambda) \quad (5.6)$$

und damit

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{p(\Lambda_j) \cdot \Lambda_j}{\tilde{g}_1(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

5C. Der Algorithmus E C P

Als Verallgemeinerung von (3.11) bis (3.15) gilt mit $m = \rho \cdot n$

$$P_j = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j}}^m (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_\mu); \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.8)$$

und

$$d_j = \frac{\det \mathbf{F}(\lambda_j)}{P_j} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}_\rho}; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.9)$$

Sonst alles wie dort.

6. Das Newtonsche Tangentenverfahren im E C P

Die Newton-Verbesserung (3.2) geht zufolge

$$f'(\Lambda) = -T(\Lambda) \quad (6.1)$$

und

$$f(\Lambda) = 1 - S(\Lambda) \quad (6.2)$$

über in die Iterationsvorschrift

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{1 - S(\Lambda_j)}{T(\Lambda_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Andererseits war nach (3.18)

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \frac{1 - S(\Lambda_j)}{T(\Lambda_j)} \cdot S(\Lambda_j); \quad j = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Beide Algorithmen unterscheiden sich demnach um den Faktor $S(\Lambda_j)$, der im Verlauf der Iteration gegen eins strebt.

Der Algorithmus endet mit $S(\Lambda_\nu) = 1$, dann ist

$$\Lambda_\nu = \lambda_\nu \quad (6.5)$$

ein Eigenwert. Soll nun ein Stützwert $\tilde{\lambda}_k$ iterativ verbessert werden, so wird mit dem Hauptwert (3.19) der Optimalwert

$$\Lambda_k = \tilde{\lambda}_k - \frac{d_k}{2 - S(\Lambda_k)} \quad (6.6)$$

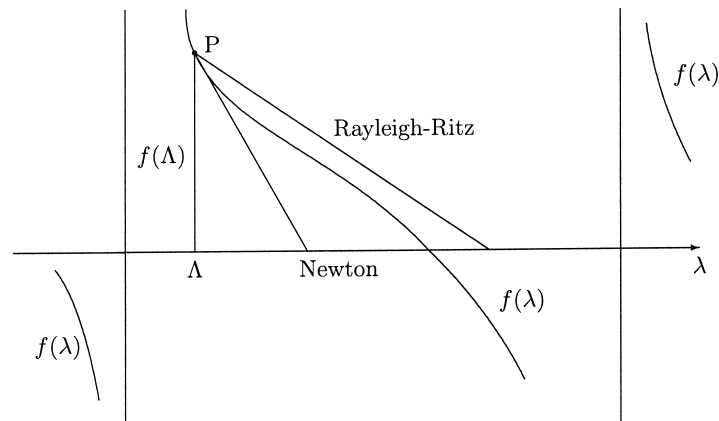


Abbildung 6: Begleitende Einschließung eines einfachen Eigenwertes.

berechnet und mit diesem gestartet. Die Abbildung (6) zeigt die Funktion $f(\lambda) = 1 - S(\lambda)$ im Reellen. Die Tangente im Punkt P schneidet die λ -Achse nach (6.3), dagegen liefert (6.4) einen Schnittpunkt, der auf der anderen Seite des Nulldurchganges (also des gesuchten Eigenwertes) liegt. Auf diese Weise gewinnt man eine iterative Einschließung, die es erlaubt, den Algorithmus zu beenden, sobald die erreichte Anzahl von gültigen Dezimalstellen für die Belange des Anwenders ausreichend ist.

7. Numerische Beispiele

Erstes Beispiel. Zum Paar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

gehören die Eigenwerte nach [29, S. 360]

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 3. \quad (7.2)$$

Der Start mit $\Lambda_1 = 3,1$ führt über die geschiftete Matrix

$$\mathbf{F}(\Lambda_1) = \mathbf{A} - \Lambda_1 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3,1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3,1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3,1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3,1 \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

auf die obere Dreiecksmatrix (4.2)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3,1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,132\,258\,065 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,224\,054\,463 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3,1 & -0,649\,128\,661 \end{array} \right], \quad (7.4)$$

und parallel dazu auf

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3,1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,132\,258\,065 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,224\,054\,463 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3,1 & -0,649\,128\,661 \end{array} \right]; \quad (7.5)$$

wo das Endpivot eingerahmt wurde.

Die Auflösung der beiden gestaffelten Gleichungssysteme (7.4), (7.5) ergibt die Vektoren

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{jk} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,741\,564\,700 \\ -2,298\,850\,573 \\ -2,450\,871\,338 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{jk} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,741\,564\,700 \\ -0,766\,283\,525 \\ -0,816\,957\,112 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

und damit den Rayleigh-Quotienten

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 + \frac{p_1}{\mathbf{w}_1^T \mathbf{B} \mathbf{z}_1} = 3,1 + \frac{-0,649\,128\,662}{5,313\,746\,293} = 2,977\,839\,734. \quad (7.7)$$

Alles weitere zeigt die Tabelle 1.

Es resultiert somit das Ergebnis

$$\lambda = 3; \quad \mathbf{y} = \mathbf{w} \cdot \alpha; \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \beta \quad (7.8)$$

mit zwei (etwa zum Zweck der Normierung) geeignet zu wählenden Faktoren

$$\alpha \neq 0; \quad \beta \neq 0. \quad (7.9)$$

Zweites Beispiel.

Das Polynom

$$f(\lambda) = -8 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^4 \quad (7.10)$$

besitzt die Nullstellen

$$-1, \quad 2, \quad -2i, \quad +2i. \quad (7.11)$$

Start mit 2,1 (5% Fehler).

$$f(\Lambda_1) = 2,6701, \quad f'(\Lambda_1) = 28,193 \quad (7.12)$$

ergibt nach Newton den verbesserten Wert

$$\Lambda_2 = 2,007\,526\,691. \quad (7.13)$$

Dagegen wird mit dem Begleitpolynom (3.3)

$$\left. \begin{aligned} g_1(\Lambda) &= a_0 - 1 \cdot a_2 \Lambda^2 - 2 \cdot a_3 \Lambda^3 - 3 \cdot a_4 \Lambda^4 = -8 - 1 \cdot 2 \Lambda^2 - 2(-1) \Lambda^3 - 3 \cdot 1 \cdot \Lambda^4 \\ &= -8 - 2\Lambda^2 + 2\Lambda^3 - 3\Lambda^4 = -56,642\,3 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Tabelle 1.

	Λ	p	\mathbf{z}	\mathbf{w}
1	3,1	-0,649 128 662	$\begin{bmatrix} -0,741\,564\,700 \\ -2,298\,850\,573 \\ -2,450\,871\,338 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,741\,564\,700 \\ -0,766\,283\,525 \\ -0,816\,957\,112 \\ -1 \end{bmatrix}$
2	2,977 839 734	0,187 408 303	$\begin{bmatrix} -1,078\,903\,155 \\ -3,212\,800\,689 \\ -3,165\,248\,038 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,078\,903\,123 \\ -1,070\,933\,529 \\ -1,055\,082\,657 \\ -1 \end{bmatrix}$
3	2,998 792 484	0,009 688 414	$\begin{bmatrix} -1,004\,093\,113 \\ -3,010\,904\,952 \\ -3,008\,480\,899 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,004\,039\,115 \\ -1,003\,634\,984 \\ -1,002\,826\,966 \\ -1 \end{bmatrix}$
4	2,999 996 473	-0,000 028 216	$\begin{bmatrix} -1,000\,011\,757 \\ -3,000\,031\,746 \\ -3,000\,024\,690 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1,000\,011\,758 \\ -1,000\,010\,582 \\ -1,000\,008\,230 \\ -1 \end{bmatrix}$
5	3.	0.	$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

nach einiger Rechnung

$$\Lambda_2 = 2,1 + \frac{2,607\,1 \cdot 2,1}{-56,642\,3} = 2,003\,342\,378. \quad (7.15)$$

Den Fortgang der Iteration zeigt die Tabelle 2.

Tabelle 2.

	Newton	Begleitpolynom	
1	2,1	2,1	} (7.16)
2	2,007 526 691	2,003 342 378	
3	2,000 046 868	2,000 003 725	
4	2,000 000 002	2.	
5	2.		

Das Verfahren (5.4) bis (5.7) konvergiert somit nur wesentlich schneller als das von Newton.

Drittes Beispiel.

Die Polynommatrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \mathbf{A}_2\lambda^2 \quad (7.17)$$

mit den Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

hat die kompakte Darstellung (4.1)

$$\mathbf{F}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 16\lambda \\ 1 & 2\lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Die Eigenwerte sind gut getrennt, was eine zügige Konvergenz erwarten läßt.

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1 + \sqrt{3} \cdot i, \quad \lambda_4 = -1 - \sqrt{3} \cdot i. \quad (7.20)$$

Algorithmus 5 B, Kondensation nach (5.4) bis (5.7).

Die Reduktion (Elimination) erfolgt von unten nach oben; das Endpivot steht daher in der Position 11.

Der Start mit $\Lambda_1 = 3$ (50% Fehler!) führt auf

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 48 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{6,333\,333\,333} & 0 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,555\,555\,555 \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{F}_1^T = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 48 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{6,333\,333\,333} & 0 \\ 48 & 18 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2,666\,666\,667 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Mit den beiden Bilinearformen

$$a_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{z} = -2,666\,666\,667; \quad a_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{z} = 1,296\,296\,293 \quad (7.23)$$

wird nach

$$g_1(\Lambda) = a_0 - a_2\Lambda^2 = -2,666\,666\,667 - 1,296\,296\,293 \cdot 3^2 = -14,333\,333\,333 \quad (7.24)$$

Tabelle 3.

	Λ	p	w	z
1	3	6,333 333 333	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2,666 666 667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,555 555 555 \end{bmatrix}$
2	1,674 418 604	-1,974 100 130	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4,777 777 785 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,178 337 192 \end{bmatrix}$
3	1,941 868 040	-0,348 892 923	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4,119 744 408 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,132 596 604 \end{bmatrix}$
4	1,998 278 100	-0,010 331 402	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4,003 446 767 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,125 215 515 \end{bmatrix}$
5	1,999 998 517	$-8,897 74 \cdot 10^{-6}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4,000 000 966 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,125 000 185 \end{bmatrix}$
6	2.	0.	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0,125 \end{bmatrix}$

und damit

$$\Lambda_2 = 3 + \frac{6,333\,333\,333 \cdot 3}{-14,333\,333\,333} = 1,674\,418 \quad (7.25)$$

Den Fortgang der Iteration zeigt die Tabelle 3.

Damit werden die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \alpha; \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,125 \end{bmatrix} \beta. \quad (7.26)$$

Viertes Beispiel. Das Polynom

$$f(\lambda) = 6 + \lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3 \quad (7.27)$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3. \quad (7.28)$$

Algorithmus E C P (3.11) bis (3.16).

Mit den Stützwerten

$$\tilde{\lambda}_1 = -0,9, \quad \tilde{\lambda}_2 = 2,2, \quad \tilde{\lambda}_3 = 2,8 \quad (7.29)$$

Tabelle 4.

Newton	E C P	EXPANSION
-0,9	-0,9	-0,9
-1,006 396 990	-1,000 782 414	-0,995 148 625
-0,999 979 074	-0,999 999 933	-0,999 990 118
-1.	-0,999 999 999	-0,999 999 999
2,2	2,2	2,2
1,953 846 154	1,924 631 183	1,922 834 646
1,998 721 386	1,999 622 784	1,993 930 700
1,999 998 913	1,999 950 577	1,999 957 514
2.	1,999 999 997	1,999 999 998
	2.	2.
2,8	2,8	2,8
3,086 792 453	3,005 573 612	3,060 146 699
3,007 968 933	3,000 035 491	3,002 967 236
3,000 078 074	3,000 000 029	3,000 000 028
3,000 000 008	3.	3.
3.		

wird

$$f(\tilde{\lambda}_1) = 1,131, \quad f(\tilde{\lambda}_2) = -0,512, \quad f(\tilde{\lambda}_3) = -0,608, \quad (7.30)$$

und damit werden die Produkte (3.11)

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3) = (-0,9 - 2,2)(-0,9 - 2,8) = 11,47 \\ P_2 &= (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3) = (2,2 + 0,9)(2,2 - 2,8) = -1,86 \\ P_3 &= (\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_1)(\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_2) = (2,8 + 0,9)(2,8 - 2,2) = 2,22 \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

und mit diesen die Defekte

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{1,131}{11,47} = 0,098\,605\,056, \\ d_2 &= \frac{-0,512}{-1,86} = 0,275\,268\,817, \\ d_3 &= \frac{-0,608}{2,22} = -0,273\,873\,873. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Für den Algorithmus 3B (Expansion) benötigen wir das Begleitpolynom (3.3)

$$g_1(\lambda) = a_0 - 1 \cdot a_2 \lambda^2 - 2 \cdot a_3 \lambda^3 = 6 - 1(-4)\lambda^2 - 2,1\lambda^3 = 6 + 4\lambda^2 - 2\lambda^3. \quad (7.33)$$

Es werden alle drei Stützwerte nach den drei Algorithmen berechnet und in Tabelle 4 zusammengestellt.

Es ist ersichtlich, dass alle drei Algorithmen nahezu gleichwertig sind.

Literatur

- [1] BUDICH, H. & S. FALK (1997): Der Eigenwertalgorithmus ECP (Expansion des charakteristischen Polynoms) auf dem Prüfstand. ZAMM **67**, T460–T462.
- [2] CARSTENSEN, C. (1989): Lineare Konstruktion und Anwendungen von Begleitmatrizen. Dissertation, TU Hannover.
- [3] CARSTENSEN, C. & E. STEIN (1989): Über die Falksche ECP-Transformation und Verallgemeinerungen. ZAMM **69**/11, pp. 375–391.
- [4] CARSTENSEN, C. & E. STEIN (1987): Analysis und Berechnung der Falk'schen ECP-Transformation und verwandte Probleme. International Series of Numerical Mathematics, vol. **83**, pp. 47–61.
- [5] CAUGHEY, T.K. (1960): Classical normal modes in damped linear dynamic systems. J. Appl. Mech. **27**, pp. 269–271.
- [6] CAUGHEY, T.K. & M.B. O'KELLEY (1965): Classical normal modes in damped linear dynamic systems. J. Appl. Mech. **32**, pp. 583–588.
- [7] COLLATZ, L. (1963): Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig.
- [8] FALK, S. (1994): Das Reduktionsverfahren für Polynommatrizen. ZAMM **74**/1, pp. 3–15.
- [9] FALK, S. (2001): Die beschleunigte RITZ-Iteration für einparametrische Matrizen. Z. Angew. Math. **81**, pp. 1009–1012.
- [10] FALK, S. (2004): Der Eigenwertalgorithmus ECP für Polynommatrizen. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band **54**, pp. 39–62.
- [11] FALK, S. & N. WAGNER (2004): Ein neuer Eigenlöser (eigensolver) für Polynommatrizen. GAMM-Tagung Dresden.
- [12] FALK, S. & N. WAGNER (2005): Die beschleunigte RITZ-Iteration im Eigenwertalgorithmus ECP. PAMM, Proc. Appl. Math. Mech. **5**, pp. 789–790.
- [13] GÜNTHER, S. (1876): Ueber aufsteigende Kettenbrüche. Z. Math. **21**, pp. 185.
- [14] JIANQIAO, Y. & F.F. WILLIAMS (1997): Quadratic representation of a nonlinear stiffness matrix and related eigenvalue problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **146**, pp. 313–323.

- [15] KUBLANOVSKAYA, V.N. (1970): On an Approach of the Solution of the Generalized Latent Value Problem for λ -Matrices. SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. **7**, No. 4, pp. 532–537.
- [16] LANCASTER, P. (2002): Lambda-Matrices and Vibrating Systems. Dover Publications Inc.; Auflage Dover Ed (20. Dezember 2002).
- [17] LANCASTER, P. (1969): Theory of matrices. New York, London, Academic Press.
- [18] LANCASTER, P., I. GOHBERG & L. RODMAN (1982): Matrix polynomials. London, Academic Press.
- [19] LANCASTER, P. (1964): Algorithmus for lambda-matrices. Num. Math. **6**, pp. 377–387.
- [20] NEUMAIER, A. (2003): Enclosing clusters of zeros of polynomials. Journal of Computational and Applied Mathematics **156**, pp. 389–401.
- [21] RITZ, W. (1909): Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. Reine Angew. Math. **135**, pp. 1–61.
- [22] RUGE, P. (1998): Eigenvalues of damped structures: Vectoriteration in the original space of DOF. Computational Mechanics **22**, pp. 167–173.
- [23] RUHE, A. (1973): Algorithmus for the nonlinear eigenvalue problem. SIAM J. Num. Anal. **10**, pp. 674 ff.
- [24] RUMP, S. (2001): Computational error bounds for multiple or nearly multiple eigenvalues. Linear Algebra and its Applications **324**, pp. 209–226.
- [25] RUMP, S. (2003): Ten methods to bound multiple roots of polynomials. Journal of Computational and Applied Mathematics **156**, pp. 403–432.
- [26] WILLIAMS, F.W. & D. KENNEDY (1996): Accelerated Solutions for Transcendent Stiffness Matrix Eigenproblems. Shock and Vibration vol. **3**, no. 4, by John Wiley & Sons Inc., pp. 287–292.
- [27] WAGNER, N. (2004): Exkurs über mehrfache Eigenwerte von Polynommatrizen. Hagen.
- [28] ZHENG, Z., G. REN & F.W. WILLIAMS (1997): The eigenvalue problem for damped gyroscopic systems. Int. J. Mech. Sci. Vol. **39**, no. 6, pp. 741–750.
- [29] ZURMÜHL, R. & S. FALK (1992): Matrizen und ihre Anwendungen 1, Grundlagen. 6. Auflage Springer, Berlin.
- [30] ZURMÜHL, R. & S. FALK (1986): Matrizen und ihre Anwendungen 2, Numerische Methoden. 5. Auflage Springer, Berlin.